prés esdevindria la figura de primer nivell que és ara). En aquest congrés, Hilton impartí lliçons sobre nilpotència a teoria de grups i a topologia, un dels temes on la seva aportació va ser més essencial. A títol d'anècdota, als que visquérem aquell congrés ens fa gràcia recordar que Hilton va arribar a Barcelona procedent d'Alaska i en va marxar en direcció a Singapur, en una època que els científics catalans tot just començaven a treure el nas al món. Hilton, que havia estat tota la vida un gran viatger i es trobava amb seixanta anys en un moment àlgid de la seva vida, afirmava que escrivia els seus articles de recerca als avions.

Després va visitar Barcelona moltes vegades més, sovint per a grans ocasions, com el desè aniversari del CRM l'any 1994, on va impartir la conferència de celebració. Va col·laborar durant anys en treballs sobre nilpotència, localització i gènere amb els autors d'aquesta nota i en didàctica amb N. Gorgorió. Alguns matemàtics catalans vam visitar-lo a Binghamton en moments clau de les nostres carreres. Vam aprendre d'ell, no només com obtenir resultats nous en matemàtiques, sinó com gaudir fent-ho i sobretot com transmetre'ls amb claredat i convicció.

Carles Casacuberta, UB
Manuel Castellet, UAB

Benoît B. Mandelbrot: científic i matemàtic

El 14 d'octubre de 2010 va morir Benoît B. Mandelbrot, un científic i matemàtic influent en les darreres dècades. I diem científic i matemàtic ja que, tot i la seva influència en una part de la comunitat matemàtica, influència que s'explica com a impulsor de l'estudi dels *conjunts fractals* i, principalment, per donar nom a un dels conjunts matemàtics més interessants dels darrers anys, el seu treball va tenir sempre un caràcter interdisciplinari, que ell mateix explicava que li havia tancat moltes portes, almenys durant els primers anys de la seva carrera universitària.

Amb tot, com dèiem, la seva popularitat dins de la comunitat matemàtica, científica i potser fins i tot més enllà (ja sabem que de matemàtics que transcendeixen la comunitat matemàtica n'hi ha pocs, però que transcendeixin la comunitat científica encara n'hi ha menys..., excepte que el seu comportament social sigui prou *singular* perquè els diaris se'n facin ressò...) vingué de la popularitat del que avui en dia en diem *conjunt de Mandelbrot*. Aquest conjunt va estar en el moll de l'os del que a la dècada dels seixanta era una *nova* geometria, que es va anomenar *geometria fractal* i en el *descobriment* de la qual Mandelbrot va estar implicat. Parlarem una miqueta al final de l'article del significat matemàtic i d'alguns resultats d'aquest conjunt (no necessàriament deguts al mateix Mandelbrot) que expliquen perquè ha despertat tant d'interès i mostren el potencial que s'amaga a la seva *frontera*.

Una breu biografia

Benoît B. Mandelbrot va néixer a Polònia el 20 de novembre de 1924 dins d'una família jueva que provenia de Lituània. La seva família tenia un fort accent científic ja que la seva mare era física i el seu oncle, Szolem Mandelbrot, va ser un matemàtic significat que va fer carrera a París i que va influir força, no sempre de manera positiva, en la seva carrera. Només la data del seu naixement i la seva condició de jueu a la Polònia dels anys trenta fa entreveure que la seva infància no va ser pas un camí de roses. Quan tenia tretze anys, juntament amb la família, va anar a viure a París i va entrar al Lycée (secundària francesa); però quasi immediatament (la guerra acabava d'esclatar i els jueus es temien el pitjor), la seva família es va desplaçar a un petit poble, Tulle, de l'interior de França, on potser passarien més desapercebuts. Allà va seguir estudiant al Lycée, on va gaudir d'un nombrós grup de bons professors i matemàtics que fugien, igual que els seus, de les ciutats importants com París atemorits pels esdeveniments de la guerra.

Finalitzada la guerra, al voltant de 1944, va tornar a París i, després d'un any al Lycée de Parc de Lyon, es va preparar per entrar o bé a l'École Normale Supérieure o a l'École Polytech-

nique. Tot i que la seva preparació en anàlisi no era gaire sòlida, els seus bons coneixements (i una intuició innata) de geometria li van permetre passar els exàmens d'entrada per cursar els estudis a l'École Normale Supérieure, on era molt difícil accedir per la gran competitivitat. Malgrat tot, va decidir renunciar-hi i entrar a l'École Polytechnique. Segons ell mateix, la radicalitat matemàtica de l'estil de Nicolas Bourbaki imperant a l'École Normale Supérieure (i en la qual el seu oncle era un destacat membre) el va fer desistir i anar a estudiar a l'École Polytechnique.

De l'any 1945 al 1947 va estudiar en aquesta prestigiosa institució, on va tenir professors tan rellevants com Gaston Julia que, casualment, acabaria donant nom a uns conjunts matemàtics que ell mateix havia estudiat anys enrere, els (*conjunts de Julia*), i que estan fortament relacionats amb el conjunt de Mandelbrot. També va coincidir amb Paul Lévy, prominent analista i probabilista. Finalitzat aquest període va passar dos anys als EUA, al California Institute of Techonology (CalTech), però, tot i les bones impressions que en va treure, va decidir tornar a París per fer la tesi doctoral.

Va defensar la seva tesi doctoral l'any 1952 sota el títol *Games of Communication*. Algunes fonts diuen que la tesi va ser sota la direcció de Paul Lévy, però ell mantenia que la va realitzar sense cap direcció acadèmica. La inspiració científica van ser dos llibres de gran impacte en aquell moment: *Cybernetics* (Norbert Wiener) i *Theory of games and economic behaviour* (Von Neumann i Morgenstern). Finalitzada la tesi doctoral va tornar als EUA (aquesta vegada a Princenton) convidat per Von Neumann, on va tenir els primers contactes amb les noves tecnologies del moment (és a dir els primers ordinadors) i va treballar en diversos camps sense cap línia de recerca prioritària.

El 1955 va retornar a Europa i es va casar amb Aliette Kagan. Tot i tenir la intenció d'anar a viure a Ginebra per col·laborar amb Jean Piaget, el van reclamar des de França (que en aquell moment vivia una gran expansió pel que fa a les seves universitats) per anar a treballar com a professor de matemàtica aplicada a la Universitat de Lille i també per anar a donar classes a l'École Polytechnique. No es va adaptar (mai, podríem dir) als interessos de recerca dels matemàtics francesos i, després de passar l'estiu de 1958 a l'IBM Thomas J. Watson Research Center a Yorktown Hights (Nova York), va decidir allargar l'estada un any. Aquest any es va allagar trenta-cinc anys més fins que, el 1987, IBM va decidir eliminar el seu departament de recerca bàsica. Va visitar Barcelona diverses vegades: el 1987 va visitar el Museu de la Ciència i va quedar fascinat per la geometria gaudiniana; el 1996 va donar una conferència a l'IEC al *workshop* «Physics and Geometry» organitzat per S. Xambó i D. Jou; el 2006 va parlar també al Cosmocaixa.

Finalment, l'any 1988 es va incorporar al Departament de Matemàtiques de Yale, fins que es va retirar el 2005. Va morir a l'edat de vuitanta-cinc anys a Cambridge, Massachusetts, d'un càncer de pàncrees.

Podríem dir que la consolidació de B. Mandelbrot com a científic de referència va ser la publicació del llibre *The fractal geometry of nature*, l'any 1982. Aquest llibre és un compendi de dues de les seves grans obsessions com a científic. És d'una banda un llibre de divulgació científica on el lector pot gaudir de la geometria fractal sense necessitat d'anar més enllà, però també posa de manifest que objectes amb una *nova* geometria que havien estat observats de manera individual i inconnexa per economistes, físics, enginyers o meteoròlegs (l'any 1963 va coincidir amb Eduard Lorentz, poc després que aquest publiqués sense gaire interès en la comunitat científica del moment el treball sobre *dinàmica caòtica* en sistemes determinístics) segueixen un mateix patró i es poden entendre com un mateix *objecte* matemàtic.

Els diagrames que s'havien observat en el mercat de valors, les sèries temporals, les turbulències en mecànica de fluids, el perfil de les costes dels continents, l'estructura de les fulles dels arbres, observacions cosmològiques, els cristalls formats per l'aigua en estat de congelació i tants altres fenòmens naturals, eren tots el reflex, mantenia Mandelbrot, d'una nova geometria que es va anomenar *geometria fractal*. L'estudi sistemàtic de la matemàtica que envolta aquests conceptes, en topologia, anàlisi, geometria o probabilitats, ha estat motiu del treball intens d'una quantitat ingent de matemàtics durant els darrers trenta anys.

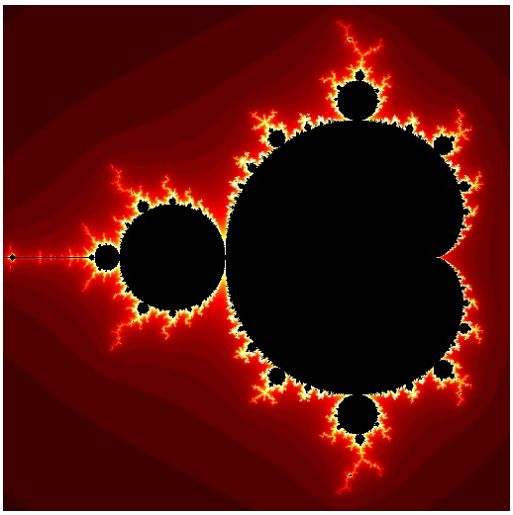
En aquest sentit, tota aquesta activitat de recerca al voltant del conjunt de Mandelbrot i de la geometria fractal ha anat molt més enllà de

l'activitat del mateix B. Mandelbrot. Ell va ser més l'impulsor de la nova teoria que no pas part dels avenços que ha generat aquest estudi, però ningú pot negar que la seva participació en tot plegat ha estat decisiva.

La seva recerca i el conjunt de Mandelbrot

El treball de B. Mandelbrot, més enllà del conjunt que porta el seu nom, és molt extens. Va publicar més de trenta llibres, i uns dos-cents articles en revistes d'economia, finances, física, matemàtica, matemàtica aplicada, probabilitats, estadística, biologia, etc. I també va ser molt productiu en la difusió de la ciència en general i de la seva obsessió per la geometria en particular.

Va rebre durant tota la seva vida una gran quantitat de premis i reconeixements acadèmics, tot i que ell sempre se'n va sentir una mica *offsider* o incomprès. Potser, per un caràcter com el seu, més aviat tibat, els reconeixements no van ser suficients i així ho verbalitzava sovint, la qual cosa no el va ajudar a fer amics. No és menys cert, però, que el seu perfil tan interdisciplinari no té un lloc fàcil en el món científic actual.



Llegint algunes de les moltes entrevistes que se li van fer (tant en paper, com a la ràdio o televisió) hom veu en Benoît Mandelbrot una certa contradicció. Va ser un clar adversari d'una matemàtica tancada en si mateixa *a la Bourbaki* (perdoneu la llicència), i va defensar sempre una visió global de la ciència i de la matemàtica; però al mateix temps sovint feia referència explícita al fet que algunes de les seves aportacions van ser gràcies al seu coneixement profund d'eines netament abstractes més properes a la matemàtica que ell va criticar que no pas a altra cosa. Potser podríem aprendre de tot plegat que una formació sòlida i un compromís científic obert serien un bon equilibri. Nogensmenys, un altre matemàtic francès de la magnitud d'Adrien Douady, provinent d'aquesta tradició bourbakiana, va ser un dels majors entesos en el conjunt de Mandelbrot, i la seva publicació *Itération des polynomes quadratiques complexes* (juntament amb J. Hubbard) l'any 1982 és sense dubte la referència clàssica més important pel que fa al remarcable conjunt.

No és el nostre interès (i, molt probablement, estaria fora del nostre abast) fer un recull o un repàs exhaustiu de la seva obra. Ens centrarem a donar una idea bàsica del conjunt que porta el seu nom: *El conjunt de Mandelbrot*. Incidentalment, l'autoria d'aquest descobriment tampoc està exempta de polèmica, possiblement més a causa de l'actitud de Mandelbrot que no pas a un dubte real sobre la seva influència, com pot llegir-se en un entretingut article titulat «Who discovered the Mandelbrot set?» a la revista *Scientific American* a l'abril de 1990 (i que es va tornar a publicar l'any 2009).

Com ja hem dit B. Mandelbrot va ser alumne de Gaston Julia al París de 1945, quan era estudiant de l'École Polytechnique. Gaston Julia, i un altre matemàtic no gaire amic seu de nom Evarist Fatou (i que també va donar nom als *conjunts de Fatou*), havien estudiat, en paraules del mateix Mandelbrot, conjunts (a $\mathbb{C}$ o $\mathbb{S}^2$) que es podien entendre com els punts repulsors dels iterats de funcions racionals a l'esfera de Riemann, o posat a l'inrevés, com els punts atractors d'una funció multivaluada donada pels iterats inversos. N'havien deduït moltes propietats que feien pensar que aquests conjunts eren força *estranys*, ja que estaven definits de forma negativa. Tècnicament, el conjunt de Julia són els punts del pla on la família d'iterats, $\{f^n(z)\}_{n\geq 0}$, *no* és una família normal en z, en el sentit clàssic de Montel, i sembla ser que Mandelbrot deduïa d'aquesta definició que aquests punts no serien gaire interesants de *mirar*. En qualsevol cas, en un primer intent, Mandelbrot va mirar de dibuixar-los, ajudat per l'ordinador, fent ús de funcions racionals prou complicades, esperant així trobar coses interessants. Els resultats eren sorprenentment similars uns amb

els altres, però no semblava fàcil trobar-ne un patró global.

Així és que Mandelbrot (sense saber-ho, en aquell moment) va decidir dibuixar el *conjunt de Mandelbrot*. Va considerar la família de funcions holomorfes més senzilla que li va venir al cap: $Q_\mu(z) = z^2 + \mu, \mu \in \mathbb{C}$. Era conegut ja dels treballs de Julia i Fatou que per a cada valor del paràmetre μ el conjunt del qual hem parlat anteriorment (on la família d'iterats no és normal o conjunt de Julia) pot només presentar dues opcions: o bé és un conjunt connex (en aquells temps la gent els deia *dragó* per la seva semblança) o és un conjunt totalment disconnex (anomenat *Fatou dust* i actualment *conjunt de Cantor*). Aquesta dicotomia correspon de forma bijectiva al fet que l'òrbita de $z = 0$ sigui fitada o escapi a l'infinit.

El conjunt de Mandelbrot $\mathcal{M}$ es defineix, doncs, com el conjunt de paràmetres μ del pla complex pels quals el conjunt de Julia corresponent no és un conjunt de Cantor sinó que és connex. Com dèiem, aquesta definició és equivalent a la següent:

$$\mathcal{M} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid Q_\mu^n(0) \nrightarrow \infty\}.$$

Observem fàcilment que és un conjunt fitat (de fet de mòdul menor que 2) ja que si agafem μ gran és immediat veure que $Q_\mu^n(0) \to \infty$, tot espiralant en la direcció contrària a les agulles del rellotge.

Si ara fem un enreixat d'un quadrat de $\mathbb{C}$ de costat 4, per exemple, i pintem de negre els punts (píxels) pels quals l'òrbita de $z = 0$ és fitada i de vermell els punts on l'òrbita escapa, *voilà*, s'obté el conjunt de Mandelbrot. Certament el conjunt de Mandelbrot és un diagrama de bifurcació (no un pla dinàmic on es mostren les òrbites dels punts com és el cas dels conjunts de Julia). Pot pensar-se com un catàleg de conjunts de Julia, un de diferent per a cada valor de μ. La frontera de $\mathcal{M}$ correspon exactament al conjunt de polinomis que s'anomenen *estructuralment inestables*; és a dir, aquells en què la família Q_c experimenta *bifurcacions*.

Les propietats topològiques, així com molts altres aspectes del conjunt de Mandelbrot, han fascinat matemàtics des del començament fins avui. El fet que la frontera de $\mathcal{M}$ tingui dimensió de Hausdorff igual a 2 és una mostra de la complexitat d'aquest conjunt. De fet, com passa sovint en els problemes matemàtics interessants, l'estudi del conjunt i de les seves propietats connecta diferents àrees de la matemàtica, com podrien ser l'anàlisi complexa, els sistemes dinàmics i la topologia, entre d'altres. Una mostra n'és el problema obert central en aquesta teoria, la conjectura coneguda com MLC. Aquesta conjectura prediu que la frontera de $\mathcal{M}$ és localment connexa. Però aquesta afirmació té multitud de conseqüències i equivalències com podria ser, per exemple, que els polinomis *hiperbòlics* (els que són expansius en el seu conjunt de Julia) són densos al pla complex.

I voldríem acabar amb una petita anècdota. En la seva primera publicació sobre el conjunt de Mandelbrot, la que es va publicar a l'article «Fractal aspects of the iteration of $z \mapsto \lambda z(1-z)$ for complex λ and z». (R. H. G. Helleman (ed.). *Annals of the New York Academy of Sciences*, 357 (1980): *Nonlinear Dynamics*, p. 249-259), i en la qual es mostrava la imatge del conjunt, l'autor va formular la conjectura que $\mathcal{M}$ no era connex. Aquesta conjectura es basava en el fet que la imatge (feta amb els mitjans de l'època) presentava unes petites illes negres desconnectades del cos principal del conjunt que feien pensar que efectivament es podia tractar d'un conjunt disconnex. En qualsevol cas, en l'últim moment abans de la seva aparició, alguna persona responsable de la publicació de l'article va pensar que aquelles illetes eren taques de tinta i va decidir esborrar-les perquè la imatge quedés perfecta. Així és, doncs, com l'article presenta una conjectura sense cap fonament aparent que la sostingui, tot per un error d'impressió. Més rocambolesc és encara que el mateix Mandelbrot en veure les primeres imatges també va pensar que les illetes eren errors numèrics, però se'n va desdir quan va veure que una de les taques era massa grossa i estructurada per ser un error... Estava veient el més gran dels *mini-Mandelbrot sets* corresponents a període 3.

Però és indubtable que aquest article va obrir tot un món de preguntes que a la vegada en van generar moltíssimes més, en un arbre que, encara avui, sembla no tenir fi.

Xavier Jarque, UB i URV
Núria Fagella, UB